Løysingsforslag TMA4240 Statistikk, Haust 2014.

Oppgåve 1.

a) $E(X) = 3\cdot 0.6 + 1\cdot 0.2 + 0\cdot 0.2 = 2$

$$Var(X) = 3^2\cdot 0.6 + 1^2\cdot 0.2 + 0^2\cdot 0.2 - 2^2 = 5.6 - 4 = 1.6$$

$$E(Y) = 3\cdot 0.4 + 1\cdot 0.2 + 0\cdot 0.4 = 1.4$$

$$Var(X) = 3^2\cdot 0.4 + 1^2\cdot 0.2 + 0^2\cdot 0.4 - 1.4^2 = 3.8 - 2.96 = 1.84$$

b) $E(X_H) = \sum_{i=1}^{15} E(X_i) = 15\cdot 2 = 30$

$$Var(X_H) = \sum_{i=1}^{15} Var(X_i) = 15\cdot 1.6 = 24$$

$$E(Y_B) = \sum_{i=1}^{15} E(Y_i) = 15\cdot 1.4 = 21$$

$$Var(Y_B) = \sum_{i=1}^{15} Var(Y_i) = 15\cdot 1.84 = 27.6$$

$$X_H + Y_B \approx\sim N\left(51, \sqrt{51.6}^2\right)$$

$$P(X_H + Y_B \ge 60) = P\left(\frac{X_H + Y_B - 51}{\sqrt{51.6}} \ge \frac{60-51}{\sqrt{51.6}}\right) \approx 1 - \Phi(1.253) = 1 - 0.895 = 0.105$$

Evt, kan ein forsvare følgjande utrekning.

$$P(X_H + Y_B \ge 60) = 1 - P(X_H + Y_B \le 59) = 1 - P\left(\frac{X_H + Y_B - 51}{\sqrt{51.6}} \le \frac{59-51}{\sqrt{51.6}}\right) \approx 1 - \Phi(1.114) = 1 - 0.867 = 0.133$$

Ein kontinuitetskorreksjon gjev

$$P(X_H + Y_B \ge 60) = P\left(\frac{X_H + Y_B - 51}{\sqrt{51.6}} \ge \frac{59.5-51}{\sqrt{51.6}}\right) \approx 1 - \Phi(1.183) = 0.119$$

c) For N_H og N_B har vi :
4 uavhengige kampar (forsøk)
Ein registrerer seier eller ikkje seier
P(seier) er den same for alle dei 4 kampane.

Dette medfører at $N_H \sim B(4, 0.6)$ og $N_B \sim B(4, 0.4)$.

$$P(N_H + N_B \ge 7) = P(N_H = 4 \cap N_B = 3) + P(N_H = 4 \cap N_B = 4) + P(N_H = 3 \cap N_B = 4)$$

$$= 0.13\cdot 0.153 + 0.345\cdot 0.026 + 0.13\cdot 0.026 = 0.032.$$

Trenaren blir sparka.

Oppgåve 2

a) $P(X_5 \geq 1) = 1 - P(X_5 = 0) = 1 - \dfrac{(1.5)^0 \cdot e^{-1.5}}{0!} = 1 - \dfrac{1}{e^{1.5}} = 1 - 0.223 = 0.777$

I poisson-prosessen er talet på hendingar i disjunkte tidsintervall uavhengige. Sannsynligheten for at Ingolv får oppleve minst eit utbrot til er sannsynet for at det skjer minst eit utbrot i ein 4-års periode.

$$P(X_4 \geq 1) = 1 - P(X_4 = 0) = 1 - \frac{(1.2)^0 \cdot e^{-1.2}}{0!} = 1 - \frac{1}{e^{1.2}} = 1 - 0.301 = 0.699 .$$

b) Ventetida til k-te hending i ein poisson –prosessen er gammafordelt med parametrar

$\alpha = 2$ og $\beta = \dfrac{1}{\lambda}$. Her blir $\alpha = 2$ og $\beta = \dfrac{1}{0.3} = \dfrac{10}{3} \Rightarrow f(t) = \dfrac{te^{-\frac{3t}{10}}}{\left(\frac{10}{3}\right)^2}, t > 0$.

$$P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - P(\text{mindre enn 2 hendingar i } [0,t])$$

$$= 1 - P(X_t < 2) = 1 - P(X_t \leq 1)$$

$$P(T \leq t) \geq 0.8 \Rightarrow P(X_t \leq 1) \leq 0.2$$

Frå tabell $P(X_t \leq 1) = 0.199$ for $\mu = 3$, $\mu = \lambda t \Rightarrow t = \dfrac{\mu}{\lambda} = \dfrac{3}{0.3} = 10$.

Det vil sei. Ingolv må opphalde seg om lag 10 år på Island

Oppgåve 3

a) $\hat{\mu}_A = \bar{X}$ og $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2}{9}$.

Estimat for μ_A : $\sum_{i=1}^{10} \dfrac{x_i}{10} = \dfrac{1192.70}{10} = 119.27$

Estimat for σ^2 : $\sum_{i=1}^{10} \dfrac{(x_i - \bar{x})^2}{9} = \dfrac{19.68}{9} = 2.19$

b) $H_0 : \mu_A = 125 \qquad H_1 : \mu_A < 125$

$\alpha = 0.01 \Rightarrow$ kritisk verdi er $-t_{0.01,9} = -2.821$.

Testobservator er $T = \dfrac{\bar{X} - 125}{\frac{S}{\sqrt{10}}}$ som under H_0 er t-fordelt med 9 fridomsgrader.

$$T_{obs} = \frac{119.27 - 125}{\sqrt{\frac{2.19}{10}}} = -12.25 < -2.821 \Rightarrow \text{ forkast } H_0$$ og konkluder med at $\mu_A < 125$

på nivå $\alpha = 0.01$.

c) Estimator for $\sigma^2 : S_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 + \sum_{i=1}^{10}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}{18}$.

$$P\left(-t_{0.025,18} < \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_A - \mu_B)}{S_p\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}} < t_{0.025,18} \right) = 0.95$$

$$\Leftrightarrow P\left(\overline{X} - \overline{Y} - S_p\sqrt{\frac{2}{10}} \cdot t_{0.025,18} < \mu_A - \mu_B < \overline{X} - \overline{Y} + S_p\sqrt{\frac{2}{10}} \cdot t_{0.025,18} \right) = 0.95$$

$t_{0.025,18} = 2.101$, $s_p^2 = \frac{19.68 + 41.75}{18} = 3.41 \Rightarrow s_p = 1.85$. $\overline{x} - \overline{y} = 119.27 - 111.19 = 8.085$.

Intervallet blir: $8.08 \pm 1.85\sqrt{\frac{2}{10}} \cdot 2.101 = (6.34,\ 9.82)$.

Vi har 95% tillit til at intervallet (6.34, 9.82) dekkjer $\mu_A - \mu_B$. Dette tyder på $\mu_A - \mu_B$ er positiv og at $\mu_A > \mu_B$.

d) $$Var\left(\hat{\beta}_1\right) = Var\left(\frac{\sum_{i=1}^{7}\left(t_i - \overline{t}\right)R_i}{\sum_{i=1}^{7}\left(t_i - \overline{t}\right)^2} \right) = \frac{\sum_{i=1}^{7}\left(t_i - \overline{t}\right)^2 Var\left(R_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^{7}\left(t_i - \overline{t}\right)^2\right)^2} = \frac{\sigma_\varepsilon^2\sum_{i=1}^{7}\left(t_i - \overline{t}\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{7}\left(t_i - \overline{t}\right)^2\right)^2} = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^{7}\left(t_i - \overline{t}\right)^2}$$

$$P\left(-t_{0.025,5} < \frac{\hat{\beta}_1 - \beta}{\frac{S_\varepsilon}{\sqrt{\sum_{i=1}^{7}\left(t_i - \overline{t}\right)^2}}} < t_{0.025,5} \right) = 0.95$$

$$\Leftrightarrow P\left(\hat{\beta}_1 - \frac{S_\varepsilon}{\sqrt{\sum_{i=1}^{7}\left(t_i - \overline{t}\right)^2}} \cdot t_{0.025,5} < \beta < \hat{\beta}_1 + \frac{S_\varepsilon}{\sqrt{\sum_{i=1}^{7}\left(t_i - \overline{t}\right)^2}} \cdot t_{0.025,5} \right) = 0.95$$

Estimat for β_1 =1.7, $s_\varepsilon = \sqrt{4.5} = 2.12$, $\sum_{i=1}^{7}\left(t_i - \overline{t}\right)^2 = 700$, $t_{0.025,5} = 2.57$ gjev intervallet

$$1.7 \pm \frac{2.12 \cdot 2.57}{\sqrt{700}} = (1.49,\ 1.91).$$

e)

Plotta: Ikkje alle verdiane ligg like bra på linja, men det er få observasjonar og boxplottet signaliserer ikkje spesielle avvik. Vi ser at medianen ligg på den negative sida.

$$\mathrm{Var}\left(\bar{X} - 5\hat{\beta}_1\right) = \frac{\sigma^2}{10} + \frac{25\sigma^2}{700} = \sigma^2\left(\frac{1}{10} + \frac{25}{700}\right)$$

$$\mathrm{Var}\left(\bar{X} - 5\hat{\beta}_1 - \bar{Y}\right) = \frac{\sigma^2}{10} + \frac{25\sigma^2}{700} + \frac{\sigma^2}{10} = \sigma^2\left(\frac{2}{10} + \frac{25}{700}\right) = 0.236\sigma^2$$

$H_0: \mu_A - 5\beta - \mu_B = 0 \quad H_1: \mu_A - 5\beta - \mu_B \neq 0$

Teststatistikk $Z = \dfrac{\bar{X} - 5\hat{\beta}_1 - \bar{Y}}{\sigma\sqrt{0.236}}$ er under H_0 er N(0,1).

$\alpha = 0.05 \Rightarrow$ forkast når $Z_{obs} > 1.96$ eller når $Z_{obs} < -1.96$.

$$Z_{obs} = \frac{119.27 - 5 \cdot 1.7 - 111.9}{2\sqrt{0.236}} = \frac{-0.415}{2\sqrt{0.236}} = -0.427$$

Det vil sei, det er ingen grunn til å forkaste H_0 på noko rimeleg nivå.

.