TMA4245 Statistikk
Eksamen august 2015

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsskisse

Oppgave 1

a) Sannsynlighetene blir

$$P(X > 2) = P(Z > \frac{1-0}{0.5}) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - \Phi(2) = 0.023,$$

og

$$\begin{aligned} P(W > 5) &= P(X + Y > 5) \\ &= P(Z > \frac{5-0-2}{\sqrt{0.5^2 + 1.5^2}}) = P(Z > 1.897) = 1 - \Phi(1.897) = 0.029. \end{aligned}$$

b) Forventet samfunnskostnad blir

$$Eg(W) = E(aW^2) = aE(W^2) = a(\text{Var}W + (EW)^2) = a(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + \mu^2).$$

En halvering av μ og σ_Y vil innebære at samfunnskostnadene reduseres med

$$\begin{aligned} & a(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + \mu^2) - a(\sigma_X^2 + (\sigma_Y/2)^2 + (\mu/2)^2) \\ &= \frac{3}{4}a(\sigma_Y^2 + \mu^2) \\ &= \frac{3}{4} \cdot 1.1 \cdot 10^{12}(1.5^2 + 2^2) \\ &= 5.1 \cdot 10^{12} \end{aligned}$$

USD. Svaret er uavhengig av σ_X^2 og den eventuelle forventede lønnsomheten av CO_2-utslippsreduserende tiltak er dermed, gitt modellen, ikke avhengig av størrelsen på naturlige klimasvingninger.

Oppgave 2

a) For at X skal være binomisk fordelt må sannsynligheten $P(Z_i > Y_i)$ for å gå raskest i siste ytre være lik p for alle løpere $i = 1, \ldots, n$, og vi må ha uavhengighet mellom hendelsene $Z_i > Y_i$ for ulike løpere.

Gitt at $n = 20$ og $p = 0.7$ blir $P(X \leq 10) = 0.048$ (tabell) og

$$P(X \geq 8 | X \leq 10) = \frac{P(8 \leq X \leq 10)}{P(X \leq 10)} = \frac{P(X \leq 10) - P(X \leq 7)}{P(X \leq 10)} = \frac{0.048 - 0.01}{0.048} = 0.98.$$

b) Likelihoodfunksjonen blir

$$L(p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x},$$

og log-likelihoodfunksjonen

$$l(p) = \ln \binom{n}{x} + x \ln p + (n-x)\ln(1-p).$$

Denne har sitt maksimum der

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dp} &= 0 \\ \frac{x}{p} - \frac{n-x}{1-p} &= 0 \\ p &= \frac{x}{n}. \end{aligned}$$

SME for p er dermed $\hat{p} = X/n$. Denne er forventningsrett siden

$$E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n} EX = \frac{1}{n} np = p.$$

Variansen blir

$$\text{Var}\hat{p} = \text{Var}\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\text{Var}X = \frac{1}{n^2} np(1-p) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

c) Vi skal teste om det er en fordel å gå siste ytre. Dette vil i så fall innebære at parameteren $p > 1/2$. Vi lar dette være vår alternative hypotese H_1. Nullhypotesen H_0 blir at $p = 1/2$. Siden vi ikke har tabell over binomisk fordeling for $n = 39$ bruker vi testobservatoren

$$Z = \frac{\hat{p} - 1/2}{\sqrt{(1/2)(1-1/2)/39}}$$

som er tilnærmet standard normalfordelt under H_0. Vi forkaster H_0 hvis $Z > z_{0.05} = 1.65$. Observert verdi av Z blir

$$Z = \frac{24/39 - 1/2}{\sqrt{(1/2)(1-1/2)/39}} = 1.44.$$

Vi beholder dermed H_0.

Testens p-verdi blir tilnærmet

$$P(Z > 1.44) = 0.075.$$

d) Vi antar at differansene $D_1, D_2, \ldots, D_n$ mellom løpstid med og uten siste ytre til hver enkelt løper er uavhengig $N(\mu, \sigma^2)$. Vi ønsker å undersøke om siste ytre gir en fordel, altså at $EY_i < EZ_i$, som vil innebære at parameteren $\mu = EY_i - EX_i < 0$ (alternativ hypotese H_1). Nullhypotesen H_1 blir $\mu = 0$.

Vi lar $S_D^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{37}(D_i - \bar{D})^2$. Ved å bruke at $\bar{D} \sim N(\mu, \sigma_D^2/n)$ og at $S_D^2(n-1)/\sigma_D^2$ er kji-kvadrat med $n-1$ frihetsgrader, følger det at

$$T = \frac{\frac{\bar{D}}{\sigma_D/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{S^2(n-1}{\sigma_D^2}/(n-1)}} = \frac{\bar{D}}{S/\sqrt{n}}$$

under H_0 er t-fordelt med $n-1 = 37-1 = 36 \approx 35$ frihetsgrader. Vi forkaster dermed H_0 hvis $T < -t_{0.05,37-1} = -1.69$.

Gitt dataene i oppgaven får vi $\bar{d} = -2.654/37 = -0.0717$, $\sum(d_i - \bar{d})^2 = \sum d_i^2 - n\bar{d}^2 = 1.362$, $s_D^2 = \sum(d_i - \bar{d})/(n-1) = 0.0378$, og

$$t = \frac{-0.0717}{\sqrt{0.0378}/\sqrt{37}} = -2.24.$$

Basert på testantakelsene kan vi dermed forkaste H_0 og konkludere med at siste ytre gir en liten fordel (H_1).

e) For test 1 blir teststyrken for $p = 0.64$

$$\begin{aligned}
P(Z > z_\alpha) &= P(\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} > z_\alpha) \\
&= P(\hat{p} > p_0 + z_\alpha\sqrt{p_0(1-p_0)/n}) \\
&= 1 - \phi(\frac{p_0 - p + z_\alpha\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}{\sqrt{p(1-p)/n}}) \\
&= \phi(\frac{p - p_0 - z_\alpha\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}{\sqrt{p(1-p)/n}}) \\
&= \phi(\frac{0.14 - 1.64\sqrt{0.25/39}}{\sqrt{0.64 \cdot 0.36/39}}) \\
&= 0.545.
\end{aligned}$$

Test 1, hvor vi kun benyttet binær informasjon om hvorvidt siste ytre ga beste tid for hver enkelt løper, ga hverken forkastning eller størst teststyrke sammenlignet med Test 2. Dette er forventet ut i fra at Test 2 er basert på all informasjon om de observerte løpstidene i motsetning til Test 1.

På den annen side bygger Test 2 på et skjevt utvalg siden de to løperne som falt er tatt ut av dataene. Dette vil forskyve $\bar{D}$ mot mer positive verdier (negative verdier gir støtte for H_1). At vi da likevel får forkastning tyder da på at det er en reell forskjell.

Den skjeve utvalget med lange løpstider i siste indre tatt ut av dataene vil kunne gjøre at antakelsen om normalfordeling ikke er oppfylt. Men dette vil i enda større grad kunne gjelde også før sensurering. Ut i fra histogrammet av observerte d_i kan det vanskelig konkluderes med at dataene avviker fra antakelsen om normalfordeling siden utvalgsstørrelsen i dette henseende er liten.

Fordelen med Test 1 er at denne ikke forutsetter normalfordeling.

Totalt sett gir dataene grunn for å konkludere med at siste ytre gir en fordel.

Oppgave 3

a) Siden $S^2(n-1)/\sigma^2$ er kji-kvadrat er

$$P\left(\chi^2_{1-\alpha/2,n-1} < \frac{S^2(n-1)}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2,n-1}\right) = 1-\alpha.$$

Løser så hver ulikhet i uttrykket over og setter deretter de to ulikhetene sammen igjen med σ^2 i midten,

$$P\left(\frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}} < \sigma^2 < \frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}\right) = 1-\alpha \tag{3.1}$$

som betyr at

$$\left(\frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}, \frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}\right)$$

er et $(1-\alpha)$-konfidensintervall for σ^2.

Fra (3.1) følger det at

$$P\left(S\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}} < \sigma < S\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}}\right) = 1-\alpha$$

slik at

$$\left(S\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}}, S\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}}\right)$$

blir et $(1-\alpha)$-konfidensintervall for σ.

b) Setning om forventning til funksjoner av stokastiske variable gir at

$$\begin{aligned}
E(\sqrt{Y}) &= \int_0^\infty y^{1/2} f(y)dy \\
&= \int_0^\infty y^{1/2} \frac{1}{2^{\frac{v}{2}}\Gamma(\frac{v}{2})} y^{\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} dy \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{2^{\frac{v}{2}}\Gamma(\frac{v}{2})} y^{\frac{v+1}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} dy \\
&= \frac{2^{\frac{v+1}{2}}\Gamma(\frac{v+1}{2})}{2^{\frac{v}{2}}\Gamma(\frac{v}{2})} \int_0^\infty \frac{1}{2^{\frac{v+1}{2}}\Gamma(\frac{v+1}{2})} y^{\frac{v+1}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} dy \\
&= \frac{\sqrt{2}\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\Gamma(\frac{v}{2})}
\end{aligned}$$

siden integranden i nest siste uttrykk ovenfor er en sannsynlighetstetthet (til en kji-kvadratfordelt variabel med $v+1$ frihetsgrader).

c) Bruker vi resultatet i forrige punkt med $v = n-1$ følger det at

$$E\sqrt{\frac{S^2(n-1)}{\sigma^2}} = \frac{\sqrt{n-1}}{\sigma} ES = \frac{\sqrt{2}\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}.$$

Altså er

$$ES = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} \cdot \frac{\sqrt{2}\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

slik at S ikke er forventningsrett for σ. En forventingsfeilkorrigert, forventningsrett estimator av σ er dermed

$$\hat{\sigma} = S\sqrt{n-1} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\sqrt{2}\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\sqrt{2}\Gamma(\frac{n}{2})} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}.$$

På tilsvarende måte som i punkt a) kan en medianrett estimator for σ utledes med utgangspunkt i samme pivotale størrelse. Vi vet at

$$P\left(\frac{S^2(n-1)}{\sigma^2} < \chi^2_{1/2,n-1}\right) = 1/2.$$

Omskriving av ulikheten gir at

$$P\left(S\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1/2,n-1}}} < \sigma\right) = 1/2,$$

som i følge definisjon av medianretthet betyr at

$$\tilde{\sigma} = S\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1/2,n-1}}} = \sqrt{\frac{1}{\chi^2_{1/2,n-1}} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}$$

er medianrett for σ.